

Выборочные примеры задач по темам квалификационного экзамена для лиц, желающих вступить в саморегулируемую организацию актуариев

Финансовая математика.

1. По условиям эмиссии облигационного выпуска предусмотрена оферта по цене 100 рублей через 21 год. Инвестор покупает облигации этого выпуска по цене 97,5 рублей. Купон выплачивается один раз в полгода в конце периода. Эффективная доходность к оферте составляет 6% годовых. Определить годовую ставку купона, выплачиваемого по облигациям данного выпуска.

Варианты ответов:

а) 5,7%

б) 5,2%

в) 4,7%

г) 4,2%

д) 3,7%

Сумма баллов: 2.

Решение.

Коэффициент дисконтирования, соответствующий процентной ставке 6%

$$v = \frac{1}{(1+i)} = \frac{1}{(1+0,06)} = 0,94340$$

Тогда $v^{21} = 0,29416$

Уравнение для текущей стоимости облигации относительно неизвестной годовой ставки купона g имеет вид:

$$97,5 = 100v^{21} + 100ga_{21;6\%}^{(2)},$$

$$a_{21;6\%}^{(2)} = 11,93797.$$

Отсюда находим

$$g = \frac{97,5 - 29,416}{100 \cdot 11,9380} = 5,7\%$$

Правильный ответ: а)

2. Кредит в размере 8000 рублей выдан на 8 лет. Для его погашения создается фонд на срок выдачи кредита, на средства фонда начисляются проценты по ставке 8% годовых. Проценты по кредиту погашаются отдельно. Чему равна накопленная стоимость фонда на конец пятого года, если взносы в фонд производятся ежегодно в конце года и увеличиваются каждый год на 100 рублей?

Варианты ответов:

а) 3717,85 рублей

- б) 3697,85 рублей
- в) 3677,85 рублей
- г) 3657,85 рублей
- д) 3637,85

Сумма баллов: 3.

Решение.

Накопленная стоимость фонда на конец восьмого года должна быть равна величине займа. Обозначая через R величину первоначального взноса в фонд, а через $S_{8;0,08}$ накопленную на конец 8 года стоимость единичной ренты постнумерандо по ставке 8% годовых, можем записать уравнение для накопленной стоимости фонда на конец восьмого года

$$R \cdot S_{8;0,08} + \frac{100}{0,08} (S_{8;0,08} - 8) = 8000$$

Отсюда находим размер начального взноса в фонд

$$R = \frac{1}{S_{8;0,08}} \left(8000 + \frac{8 * 100}{0,08} \right) - \frac{100}{0,08} = 442,26569$$

Тогда накопленный на конец 5 года фонд, обозначим его S , составит:

$$S = \left(R + \frac{100}{0,08} \right) s_{5;0,08} - \frac{5 * 100}{0,08} = 3677,85$$

Правильный ответ: в)

Актuarная математика.

3. Интенсивность смертности подчиняется закону Мейкхэма $\mu(t) = A + Bc^t$. Найдите вероятность того, что человек, точный возраст которого $x = 51$ год проживет ещё $t = 6$ лет, а затем умрет в следующие $u = 3$ года, если $A = 0,019$; $B = 0,01$ и $c = 1,011$.

Варианты ответов:

- а) 0,086
- б) 0,079
- в) 0,072
- г) 0,065
- д) 0,058

Сумма баллов: 4.

Решение.

$$\text{Функция дожития } s(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \mu(y) dy \right\} = \exp \left\{ -At - \frac{B}{\ln c} (c^t - 1) \right\}.$$

Искомая вероятность равна

$${}_t|uq_x = {}_t p_x \cdot uq_{x+t}$$

где

$${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \exp\left\{-At - \frac{B}{\ln c} c^x (c^t - 1)\right\}$$

$$uq_{x+t} = 1 - u p_{x+t} = 1 - \exp\left\{-Au - \frac{B}{\ln c} c^{x+t} (c^u - 1)\right\}$$

Подставляя в эти формулы значения параметров из условия задачи, получим

$${}_6 p_{51} = \exp\left\{-0,019 \cdot 6 - \frac{0,01}{\ln 1,011} 1,011^{51} (1,011^6 - 1)\right\} = 0,80064$$

$${}_3 q_{51+6} = 1 - \exp\left\{-0,019 \cdot 3 - \frac{0,01}{\ln 1,011} 1,011^{51+6} (1,011^3 - 1)\right\} = 0,10765$$

$${}_6|_3 q_{51} = {}_6 p_{51} \cdot {}_3 q_{51+6} = 0,086$$

Правильный ответ: а)

4. Предприятие заключило договор с пенсионным фондом. В соответствии с этим договором предприятие в течение трех лет в начале каждого года выплачивает пенсионному фонду взнос за сотрудника, точный возраст которого на момент заключения договора 55 лет. Взамен этого пенсионный фонд обязуется по достижении сотрудником 58 лет выплачивать ему ежегодную пенсию пренумерандо в размере 60000 руб. Начальные издержки фонда составляют 18% от величины годового взноса, издержки в начале второго и третьего годов действия договора равны 4,5% от величины годового взноса, издержки при выплате пенсий составляют от 2,5% годовой пенсии и возникают в начале каждого года. Резерв на начало действия договора равен 0, на конец первого года 269 979,19 руб., на конец второго года 580 095,1 руб. Базисная ставка для расчета резервов 4%, базисная ставка для расчета прибыли 7%. Период селекции составляет 2 года. Чему равна маржа прибыли, если ставка дисконта 10%.

Варианты ответов:

а) 4,57%

б) 4,07%

в) 3,57%

г) 3,07%

д) 2,57%

Сумма баллов: 5.

Решение.

Введем обозначения

G – годовой взнос

P = 60000 – пенсия

${}_t V$ – резерв на конец года t

$E_x = 18\%$ – начальные издержки

$ex_1=4,5\%$ -издержки в начале второго и третьего года
 $ex_2= 2,5\%$ -издержки связанные с выплатой пенсий.

$${}_0V = 0$$

$${}_1V = 269979,19$$

$${}_2V = 580095,10$$

$${}_3V = P \cdot (1 + ex_2) \cdot \ddot{a}_{[55]+3} = P \cdot 1,025 \cdot \ddot{a}_{58} = 60000 \cdot 1,025 \cdot 14,7 = 904050$$

$\ddot{a}_{58} = 14,7$ (значение из таблицы для ставки 4%)

Аналогично, используя таблицы смертности, получим

$$p_{[55]} = 1 - q_{[55]} = 0,9964; p_{[55]+1} = 1 - q_{[55]+1} = 0,99504; p_{[55]+2} = 1 - q_{[55]+2} = 0,99198;$$

$${}_2p_{[55]} = p_{[55]} \cdot p_{[55]+1} = 0,99148; {}_3p_{[55]} = p_{[55]} \cdot p_{[55]+1} \cdot p_{[55]+2} = 0,98353$$

$${}_0V = (1 + ex_2)P \cdot \ddot{a}_{58} \cdot \frac{{}_3p_{55}}{(1 + 0,04)^3} + (Ex - ex_1)G - (1 - ex_1) \cdot G \cdot \ddot{a}_{\overline{55:3}|}$$

$$G = \frac{1,025P \cdot \ddot{a}_{58} \cdot {}_3p_{55}}{(1,04)^3 (0,955 \cdot \ddot{a}_{\overline{55:3}|} - 0,135)}$$

$$G = \frac{1,025 \cdot 60000 \cdot 14,7 \cdot 0,98353}{(1,04)^3 (0,955 \cdot 2,87478 - 0,135)} = 302810,2$$

Величина прибыли

$$PR_0 = -Ex \cdot G = -0,18 \cdot 302810,2 = -54505,84$$

$$PR_1 = ({}_0V + G)(1 + i) - {}_1V \cdot p_{[55]}$$

$$PR_1 = 302810,2 \cdot 1,07 - 269979,19 \cdot 0,99642 = 54994,25274$$

$$PR_2 = ({}_1V + 0,955G)(1 + i) - {}_2V \cdot p_{[55]+1}$$

$$PR_2 = (269979,19 + 0,955 \cdot 302810,2) \cdot 1,07 - 580095,10 \cdot 0,99504 = 21086,51096$$

$$PR_3 = ({}_2V + 0,95G)(1 + i) - {}_3V \cdot p_{[55]+2}$$

$$PR_3 = (580095,10 + 0,955 \cdot 302810,2) \cdot 1,07 - 904050 \cdot 0,98735 = 33328,84397$$

Маржа прибыли вычисляется как отношение

$$\frac{NPV}{G \cdot \ddot{a}_{\overline{55:3}|}}$$

При рисковой ставке $r=10\%$

$$\ddot{a}_{\overline{55:3}|} = 1 + \frac{p_{[55]}}{(1+r)} + \frac{{}_2p_{55}}{(1+r)^2}$$

$$\ddot{a}_{\overline{55:3}|} = 1 + \frac{0,99642}{1,1} + \frac{0,99148}{1,1^2} = 2,72524$$

$$G \cdot \ddot{a}_{\overline{55:3}|} = 302810,2 \cdot 2,72524 = 825230,87812$$

$$NPV = PR_0 + \frac{PR_1}{1+r} + \frac{PR_2 \cdot p_{[55]}}{(1+r)^2} + \frac{PR_3 \cdot 2p_{[55]}}{(1+r)^3}$$

$$NPV = -54505,84 + \frac{54994,25}{1,1} + \frac{21086,51 \cdot 0,99642}{(1,1)^2} + \frac{33328,84 \cdot 0,99148}{(1,1)^3} = 37680,528151$$

Маржа прибыли

$$\frac{NPV}{G \cdot \ddot{a}_{\overline{55:3}|}} = \frac{37680,528151}{825230,8781} = 0,04566$$

Таким образом, маржа прибыли составит 4,57%

Правильный ответ: а)

Инвестиции.

5. Цена спот акции 155 рублей, через 5 месяцев по акции выплачиваются дивиденды. 9-месячная форвардная цена акции равна 162 рубля. Определить размер дивидендных выплат на 1 акцию, если безрисковая процентная ставка при непрерывном начислении процентов на 5 месяцев равна 8,5% годовых, а на 9 месяцев равна 9,5%.

Варианты ответов:

а) 5,29 рублей

б) 4,29 рублей

в) 3,29 рублей

г) 2,29 рублей

д) 1,29 рублей

Сумма баллов: 2.

Решение.

Если дивиденд выплачивается по акции в течение действия форвардного контракта, то форвардная цена акции определяется по формуле:

$$F = (S - de^{-r_a t_a})e^{r_F t_F}$$

где

F – форвардная цена акции

S – цена спот акции

d – дивиденды на акцию

r_d – безрисковая процентная ставка на срок до выплаты дивидендов,

t_d – срок до выплаты дивидендов,

r_F – безрисковая процентная ставка на срок форвардного контракта,

Следовательно

$$d = (S - Fe^{-r_F t_F})e^{r_d t_d}$$

$$d = (155 - 162e^{-0,095 \cdot 9/12})e^{0,085 \cdot 5/12} = 4,29$$

Правильный ответ: б)

6. Инвестор продал трехмесячный европейский пут опцион на акцию некоторой компании и приобрел трехмесячные фьючерсы на ту же акцию. Параметры заключенных контрактов представлены ниже.

| Инструмент | Цена исполнения (руб.) | Цена приобретения (руб.) | Объем (кол-во акций) |
|------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| Фьючерс | 175 | | 75 |
| Опцион | 135 | 2,7 | 100 |

К моменту окончания контрактов цена акции составила 140 руб. Определите финансовый результат для инвестора.

Варианты ответов:

а) -2855

б) -2355

в) 0

г) 2895

д) 2445

Сумма баллов: 3.

Решение.

Для проданных опционов пут финансовый результат можно записать в виде:

$$N_p (P_p - \max(0; K_p - S))$$

где

N_p – объем опционного контракта;

P_p – цена опциона;

K_p – цена исполнения опциона

S – цена акции на дату исполнения опциона;

для купленных фьючерсов финансовый результат определяется как:

$$N_F(S - K_F)$$

где

N_F – объем фьючерсного контракта;

K_F – цена исполнения фьючерсного контракта;

S – цена акции на дату исполнения фьючерсного и опционного контракта;

Общий финансовый результат определяется следующим образом:

$$PL = N_p(P_p - \max(0; K_p - S)) + N_F(S - K_F)$$

$$PL = 100(2,7 - \max(0; 135 - 140)) + 75(140 - 175) = -2355$$

Правильный ответ: б)

Теория риска.

7. Вычислите вероятность того, что размер исков к страховой компании будет в диапазоне от 1450 до 2050 млн рублей, если величина индивидуального иска имеет распределение Парето с функцией плотности $f_X(x) = \alpha\lambda^\alpha(\lambda + x)^{-\alpha-1}$ и параметрами $\alpha=0,5$ и $\lambda=500$.

Варианты ответов:

а) 0,08356

б) 0,07356

в) 0,06356

г) 0,05356

д) 0,04356

Сумма баллов: 5.

Решение.

Получим функцию распределения Парето:

$$F_X(x) = \alpha \lambda^\alpha \int_0^x \frac{1}{(\lambda+t)^{\alpha+1}} dt = \{u = \lambda+t\} = \alpha \lambda^\alpha \int_\lambda^{x+\lambda} \frac{1}{u^{\alpha+1}} du$$

$$= \lambda^\alpha \left(\lambda^{-\alpha} - (x+\lambda)^{-\alpha} \right) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x+\lambda} \right)^\alpha$$

Тогда – вероятность того что величина иска будет в диапазоне от 1450 до 2050 млн рублей равна

$$F_X(2050) - F_X(1450) = \left(\frac{\lambda}{1450+\lambda} \right)^\alpha - \left(\frac{\lambda}{2050+\lambda} \right)^\alpha = 0,06356$$

Правильный ответ: в)

8. Вычислите приближенную вероятность окончательного разорения страховой организации, если величина премии равна 400 рублей, величины индивидуальных убытков независимы и имеют нормальное распределение $N(380,400)$, начальный капитал компании равен 30 рублей. Процесс получения премий страховой организацией дискретный.

Варианты ответов:

- а) 0,04979
- б) 0,04479
- в) 0,03979
- г) 0,03479
- д) 0,02979

Сумма баллов: 3.

Решение.

Приближенная вероятность окончательного разорения определяется по формуле

$$\psi(u) = e^{-\hat{R}u}$$

где

u – начальный капитал компании,

\hat{R} – коэффициент Лундберга

Коэффициент Лундберга \hat{R} по определению является положительным корнем уравнения

$$e^{-rc} M_X(r) = 1$$

или корнем эквивалентного уравнения

$$\ln M_X(r) = rc$$

Где c – величина уплачиваемой премии

В нашем случае X имеет нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$, а значит

$$\ln M_X(r) = \mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}$$

Тогда, решая уравнение

$$\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2} = rc$$

относительно неизвестного r

получим

$$\hat{R} = \frac{2(c - \mu)}{\sigma^2}$$

и

$$\hat{R} = \frac{2(400 - 380)}{400} = 0,1$$

Окончательно

$$\psi(u) = e^{-0,1 \cdot 30} = 0,04979$$

Правильный ответ: а)

9. Какие из перечисленных видов активов принимаются для покрытия (обеспечения) страховых резервов?

I. жилищные сертификаты, выпущенные на территории Российской Федерации эмитентами - юридическими лицами, которые имеют права заказчика на строительство жилья;

II. инвестиционные паи открытых и интервальных паевых инвестиционных фондов, правила доверительного управления которых зарегистрированы в установленном порядке федеральным органом исполнительной власти по рынку ценных бумаг;

III. ценные бумаги, в момент приобретения которых было известно, что в отношении их эмитентов осуществляются меры досудебной санации или возбуждена процедура банкротства (наблюдения, внешнего управления, конкурсного производства) в соответствии с законодательством Российской Федерации о банкротстве, либо в отношении которых такая процедура применялась в течение двух предыдущих лет;

IV. ценные бумаги, эмитентами которых являются страховщики, вклады и доли в складочном или уставном капитале страховщиков, а также активы, приобретенные страховщиком за счет средств, полученных по договорам займа и кредитным договорам;

V. дебиторская задолженность страховщиков, возникшая в результате расчетов по прямому возмещению убытков в соответствии с законодательством Российской Федерации об обязательном страховании гражданской ответственности владельцев транспортных средств, уменьшенная на сумму кредиторской задолженности, возникшей в результате этих же расчетов со страховщиками;

Варианты ответов:

- а) Все, кроме II;
- б) Все, кроме III;
- в) Все, кроме IV;
- г) Все, кроме III и IV;
- д) Все вышеперечисленное.

Сумма баллов: 1.

Правильный ответ: г)

10. Какие из перечисленных видов активов не принимаются для покрытия собственных средств страховщика?

- I. займы страхователям по договорам страхования жизни;
- II. векселя, выданные физическим лицам;
- III. государственные ценные бумаги субъектов Российской Федерации;
- IV. доля перестраховщиков в страховых резервах;
- V. депо премий по рискам, принятым в перестрахование

- а) Все, кроме I;
- б) Все, кроме III;
- в) Все, кроме IV;
- г) Все, кроме V;
- д) Все вышеперечисленное.

Сумма баллов: 1.

Правильный ответ: б)